CONSTRUIRE LE CONCEPT D'ARGUMENTATION MATHÉMATIQUE

Nicolas Balacheff
Laboratoire d'informatique de Grenoble (LIG)
Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP

Préambule

Cet exposé reprend pour une grande part celui du CORFEM (2019) dont le texte est disponible :

- Balacheff, N. (2019). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. XXVIe Colloque CORFEM, Strasbourg, France. 29 pages.

Il comprend

- Une introduction rapide du contexte dans lequel se pose le problème de la caractérisation de l'argumentation mathématique
- Une première partie qui dessine les grandes lignes de l'évolution de la preuve comme objet d'enseignement (recherche dont le compte-rendu sera disponible au printemps 2022 -- Notes for a study of the didactical transposition of mathematical proof)
- La seconde partie reprend des éléments de l'exposé CORFEM et une synthèse d'un exposé à ICME 14 dont le texte sera disponible au printemps 2022 (The transition from mathematical argumentation to mathematical proof, a learning and teaching challenge)

Ce document ppt est un support de cours,
seul le texte publié dans les actes fera foi et pourra être cité.

Des diapositives (grises) ont été insérées pour faciliter la transition entre les parties. Une diapositive a été ajoutée avec les références (la plupart sont accessibles par HAL, Google Scholar ou Research Gate)

D'éventuels commentaires ou questions peuvent être adressés à <nicolas.balacheff@imag.fr>

La volonté d'un enseignement précoce

Une position institutionnelle internationale

- La preuve est au cœur de l'activité mathématique de la maternelle à l'université
- Comprendre ce qu'est une approche de justification raisonnée basée sur la logique fait partie de la formation citoyenne

« Les graines de cette démarche fondamentalement mathématique sont semées dès les petites classes. »

(Villani & Torossian, 2018, pp. 25-26)

Compétences visées

→ Étayer ses affirmations sur la base de résultats établis et d'une bonne maîtrise de l'argumentation.

→ Démontrer

L'argumentation dans le discours des institutions scolaires

Cycle 2

- « Le discours produit est argumenté et prend appui sur des observations et des recherches et non sur des croyances. »

Cycle 3

- « Les mathématiques contribuent à construire chez les élèves l'idée de preuve et d'argumentation. »

Cycle 4

- Démontrer : « utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion »

→ « *moyen mathématique d'accès à la vérité* » en donnant à voir « les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent. »

- « défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation ».

Source ministère de l'éducation nationale

Transition (1)

L'apprentissage de démonstration, plus récemment de la « preuve » dans la classe de mathématique, a une longue histoire dont les premiers moment remontent à la rédaction des Éléments d'Euclide (circa -300). Cet apprentissage a été indissociable de celui de la géométrie jusqu'au milieu du XX° siècle. La question de l'enseignement de la démonstration en tant que telle est explicitement posée au début du XX° siècle par les mathématiciens alors que leur communauté s'institutionnalise (création de l'IMU).

Les diapositives suivantes décrivent les principaux jalons de cette histoire dans la perspective de comprendre le travail de la transposition.

Notes pour une histoire de la transposition : (1) Les origines

Euclide, l'idéal et la critique

- La question de la preuve est longtemps indissociable de celle du texte de la géométrie hérité d'Euclide (circa -300) fondé sur l'idéal de rigueur d'un socle théorique (axiomes, définitions, formalisation du texte)
- La forme des Éléments d'Euclide est un modèle jusqu'au milieu du XX° siècle
- Des critiques :
  - Descartes (1628) : l'idéal euclidien privilégie la conviction sur la compréhension.
  - *Dechalles* (trad Ozanam 1709) : expliquer d'une manière nouvelle et très facile, avec l'usage de chaque proposition !
  - *Clairaut* (1741) : intéresser et éclairer le commençant (Écoles de Port-Royal) → peut être lu comme un manifeste qui fait usage d'une géométrie pratique pourvoyeuse de sens mais récuse d'être un traité d'arpentage. Clairaut refuse de démontrer des évidences.

Jusqu'à la Révolution, la géométrie d'Euclide est enseignée à une classe privilégiée de la population, notamment à ceux « qui s'adonnent aux mathématiques » ; ce sont principalement des adultes.

Après la Révolution, cet enseignement s'inscrit dans un projet d'éducation nationale qui prend forme au cours de la première moitié du XIX° siècle.

Naissance de l'enseignement « publique »

Le développement massif de l'enseignement fait naître le besoin de manuels élémentaires

→ premières transpositions didactiques (ref. aux institution)

Rupture entre géométrie pratique et théorique (projet d'instruction publique, Monge 1793)

La géométrie proche du modèle d'Euclide est enseignée à ceux (pas celles) qui veulent poursuivre des études universitaires.

- Legendre (1794) : « des efforts pour donner aux démonstrations toute la clarté et la brièveté que le sujet comporte » → diffusion internationale et grande influence : rival d'Euclide (les cas US, Italien, etc.)
- Lacroix (1798) favoriser la compréhension en relation avec des application, discours sur analyse et synthèse (comprendre et prouver, héritier de Condillac, assistant de Monge) référence nationale, on peut parler d'un *manuel*.

Legendre et Lacroix définissent les termes méta : théorème «qui deviennent évidents grâce aux *démonstrations* (Legendre), énoncés qui doivent être *démontrés* (Lacroix)

→ mais *démonstration* (*garantie de la plus haute de la vérité)* ne fait pas partie des termes définis.

À la fin du 19ème siècle, la preuve est un objet nommé : *la démonstration*.
Elle n'est pas constituée en objet d'enseignement.

Notes pour une histoire de la transposition : (3) 1ère moitié du XX° siècle

Mathématicien, une profession

- Développement économique et industriel
- Naissance de la communauté des mathématiciens
  - 1893 séparation de l'astronomie
  - 1897 premier congrès de mathématiciens
  - 1899 création de « L'enseignement mathématique »
  - 1908 création de l'ICMI
    - initiative de D. E. Smith, sa conférence IMU présente « Some "Advanced Views" On High School Math in the US »
    - 'to survey and publish a general report on current trends in mathematics education in the various countries'
  - 1911 un rapport sur les degrés de rigueur
    - A) *Entirely logical method ;* B) *Empirical foundations, logical development ;* C) *Intuitive considerations alternate with the deductive method* ; D) *Intuitive-experimental method*
  - 1920 Création de l'IMU à Strasbourg
  - 1969 Première conférence ICME à Lyon
  - 1977 Première conférence PME à Utrecht

Formation scientifique

Il importe de faire sentir très tôt la différence entre la certitude donnée par la méthode géométrique et celle qui résulte de la méthode expérimentale : c'est à cette condition que se développera le besoin de démonstrations (Instructions 1925).

- Guidé par le maître et réalisant d'abord des opérations concrètes appliquées à des objets donnés, l'enfant acquerra la notion abstraite d'une opération de nature bien définie mais portant sur un élément indéterminé. Puis il deviendra capable d'imaginer qu'il applique une autre opération au résultat de la première sans l'avoir réalisée. Enfin, concevant la suite des mécanismes des opérations ainsi définies, il sera capable de prévoir certaines propriétés des résultats : il aura réalisé sa première démonstration. (décret 1960).

La démonstration a le statut d'outil mathématique à enseigner

dont l'apprentissage est induit par celui de la géométrie.

Notes pour une histoire de la transposition : (4) 2nde moitié du XX° siècle

La preuve d'émancipe de la géométrie

Les mathématiques sont présentes dans tous les secteurs scientifiques, des sciences de la nature aux sciences humaines et sociales, elles apparaissent comme un langage universel.

Les mathématiques de la maternelle à l'université (APMEP 1967)

Période 1, les mathématiques modernes :

- Les mathématiques sont une science déductive et non une science expérimentale.
- Les mathématiques forment une théorie qui doit rassembler sous une même structure des connaissances jusqu'alors présentées de manière éparse.

Période 2, début des années 80 (70 aux Etats-unis) abandon de la réforme des "mathématiques modernes" → accent sur la résolution de problèmes, application de la discipline.

Pas de retour à Euclide

Depuis le début des années 2000 : **faire des mathématiques le lieu d'une véritable activité de recherche :** *développer les capacités à raisonner & argumenter, expérimenter & imaginer.*

La démonstration perd du terrain au profit du raisonnement déductif, conception plus large de la validation dans l'enseignement des mathématiques.

→ **une révolution épistémologique plus qu'une révolution pédagogique**

Notes pour une histoire de la transposition : (5) XXI° siècle

La preuve de la maternelle à l'université

The **content domains** define the specific mathematics subject matter covered by the assessment the cognitive domains define the sets of behaviors expected of students as they engage with the mathematics content. (TIMSS 2003 p.9) .

→ Reasoning → *making deductions based on specific assumptions and rules, and justifying results*.

TIMSS Assessment framework document, grades 4 and 8 (càd CM1 & 4°)

2003	Justify/Prove	"Provide evidence for the validity of an action or the truth of a statement by reference to mathematical results or properties; develop mathematical arguments to prove or disprove statements, given relevant information." (TIMSS 2003 p. 33)
2007	Justify	"Provide a justification for the truth or the falsity of a statement by reference to mathematical results or properties" (TIMSS 2007 p. 38)
2008	Justify	"Provide a justification for the truth or falsity of a statement by reference to mathematical results or properties." (TIMSS 2008 p. 22)
2011	Justify	"Provide a justification by reference to known mathematical results or properties." (TIMSS 2011 p. 46)
2015	Justify	"Provide mathematical arguments to support a strategy or solution." (TIMSS 2015 p. 27)
2019	Justify	"Provide mathematical arguments to support a strategy or solution." (TIMSS 2019 p. 24)

La volonté d'un apprentissage précoce

2019	Justify	"Provide mathematical arguments to support a strategy or solution." (TIMSS 2019 p. 24)

Problématique éducative

→ **distinguer croyance et connaissance**

→ distinguer convaincre et persuader

Problématique didactique

→ apprendre à **répondre à la question de la verité en mathématique**

→ distinguer **argumentation et preuve**

→ comprendre le **rôle de la preuve**

Transition (2)

Cette dernière partie de l'exposé aborde le problème de la caractérisation de l'argumentation mathématique. Le fait de considérer cet apprentissage à des niveaux élémentaires appelle une attention particulière à ce que l'on entend par « argumentation » et par « énoncé » dont la « vérité » est en question. Les premières diapositives concernent ces questions de définition éventuellement en s'appuyant sur les sciences du langage. Ce qui suit reprend pour l'essentiel le contenu de l'exposé du CORFEM avec une dernière diapositive qui cherche une synthèse entre ce qui a été présenté et les apports de chercheurs qui ont particulièrement contribué sur ce thème.
Il s'agit d'un travail en cours.

On pourra consulter le billet de mon blog : Remarks on truth, the word and more à propos du vrai.

Une problématique complexe

« Il n’est pas question de démontrer tous les théorèmes ou propriétés figurant au programme »

« Afin de ne pas détourner de la résolution de problèmes les élèves ayant des difficultés à entrer dans les codes de rédaction d’une démonstration, il importe de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d’expérimentation. »

Le travail de la classe comprend ainsi « des temps de mise en commun et d’argumentation permettant de produire une preuve et des temps de mise en forme (démonstrations rédigées) »

Un postulat

L'**argumentation** est un discours

orienté, il vise la validité d'un énoncé

intentionnel, il cherche à modifier un jugement

critique, il analyse, soutient et défend

Argumenter est un acte

qui structure la socialisation

qui instrumente le langage

qui change la valeur épistémique d'un énoncé

qui modifie le rapport à la connaissance

caractérisée par le couple

[énoncé, argumentation]

Le "vrai" ?

- en mathématiques, le “vrai” est l'un des éléments d'une paire dans laquelle une proposition prend une des valeurs (vrai/faux, V/F, 0/1, etc), elle est le résultat d'un traitement "formel“ (càd syntaxique).
- En dehors des mathématiques, le mot " vrai " a un sens qui a sa source dans la culture et l'histoire sociale : c'est un jugement sur une affirmation.

En anglais "*true*" (*tree*, arbre) fiabilité et sincérité de la personne
En français "*Vrai*" (*veritas*) exactitude de la règle, adéquation et conformité à la chose.

Une distinction nécessaire à un niveau précoce (Austin)

énoncé (mise en parole)
Vs
phrase (composée de mots)

Quatre conditions pour qu'une phrase soit tenue pour vraie :

- être éthique (sincérité, fiabilité)
- être linguistiquement approprié (énoncé vs phrase)
- être sémantiquement adéquat (correspondance)
- être formellement correct (cohérence)

Remarks on truth, the word and more

Raisonnement - Explication
Argumentation - Preuve

Raisonnement

Organisation des énoncés orientée vers la modification de la valeur épistémique d'un énoncé cible.

La nécessité de construire la cohérence et l'appartenance du nouvel énoncé au système de connaissances (le connu).

Explication

Un système de relations dans lequel l'énoncé cible trouve sa place par rapport au connu.

→ Il établit la validité de l'énoncé de la cible

Raisonnement - Explication
Argumentation - Preuve

Preuve

Une argumentation acceptée par une communauté donnée à un moment donné.

Cette décision nécessite un système de validation commun aux interlocuteurs.

Démonstration

Une argumentation structurée selon des règles conformes à

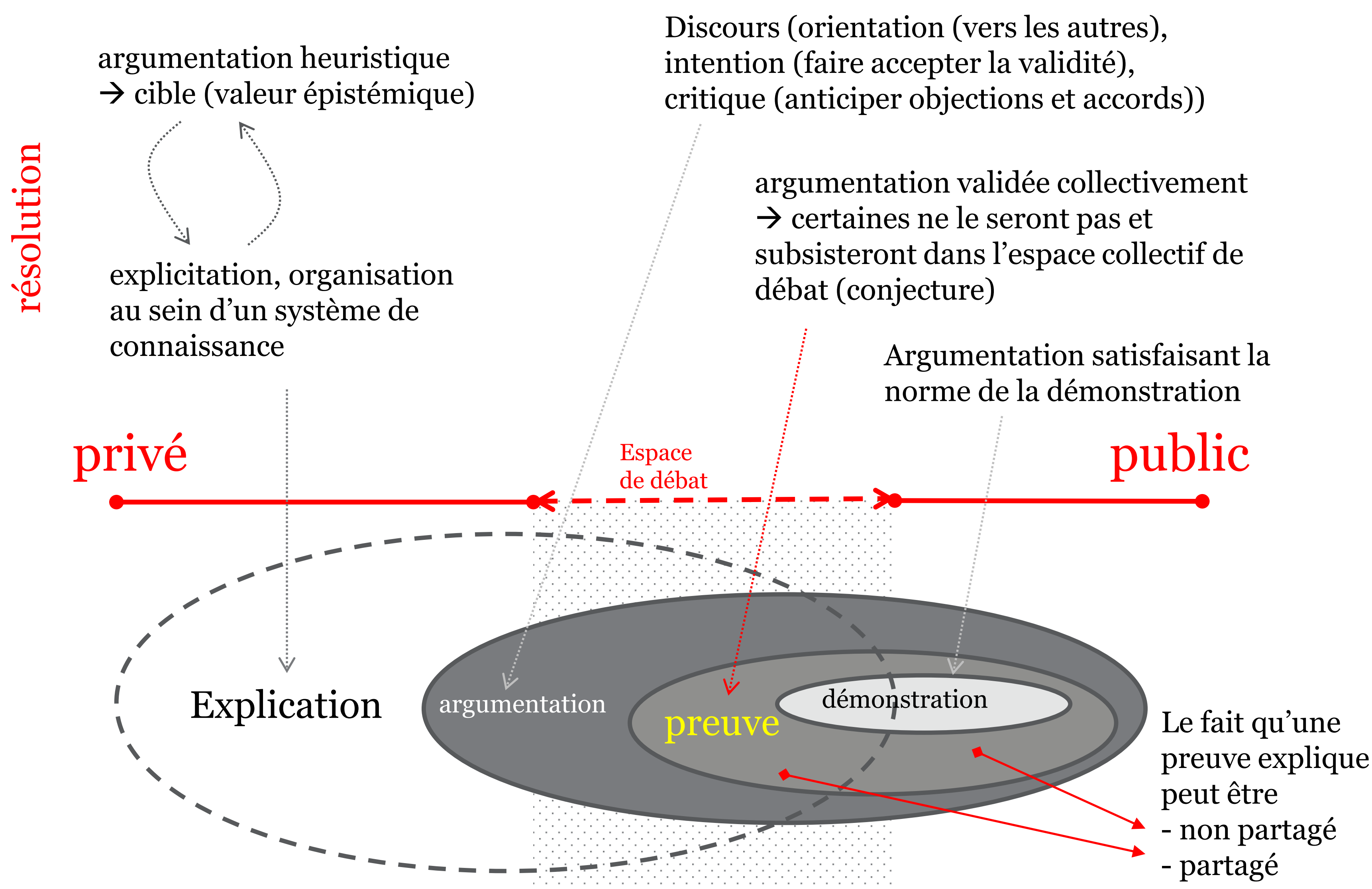
une norme établie par les mathématiciens

Le plus classiquement : un énoncé est affirmé vrai ou est déduit de ceux qui le précèdent dans le discours à l'aide d'une règle d'inférence prise dans un ensemble de règles bien définies.

Preuve formelle

"Une **preuve formelle** est une séquence finie de phrases (appelées formules bien formées dans le cas d'un langage formel), dont chacune est un axiome, une hypothèse, ou découle des phrases précédentes de la séquence par une règle d'inférence."

explication, argumentation, preuve, démonstration



Types d'argumentation / preuve

David Tall et al., 2012

- « Children or novices do not initially think deductively. »
- « It is only much later—usually at college level—that axiomatic formal proof arises in terms of formal definitions and deductions »

→ to rethink the nature of mathematical proof and to consider the use of different types of proof related to the cognitive development of the individual.

pas seulement → problématique épistémique

Piaget

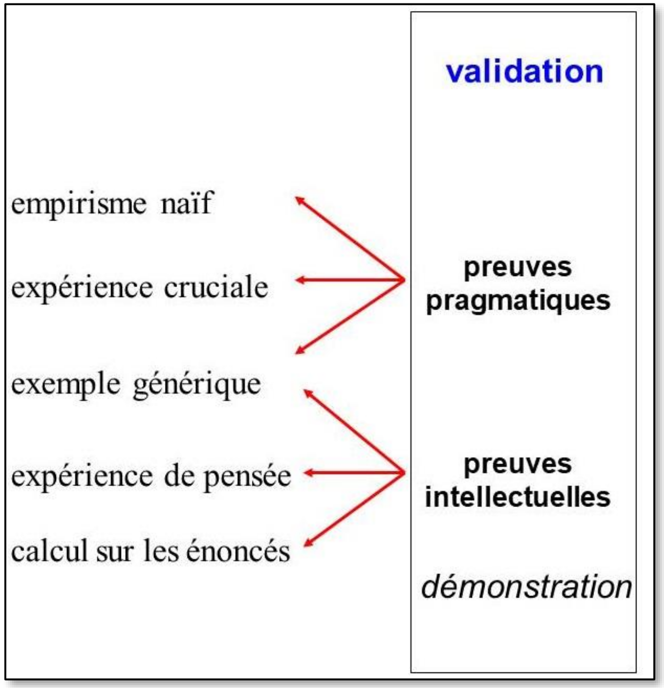
Le développement de la pensée représentative passe par deux grandes étapes caractérisées par la nature des rapports aux objets qu'elle considère et par la nature des structures logiques qui sous-tendent les conduites et les notions des sujets.

Quelles types de preuves disponibles avant l'apprentissage de la démonstration ?

Quelle place leur donner dans l'enseignement ?

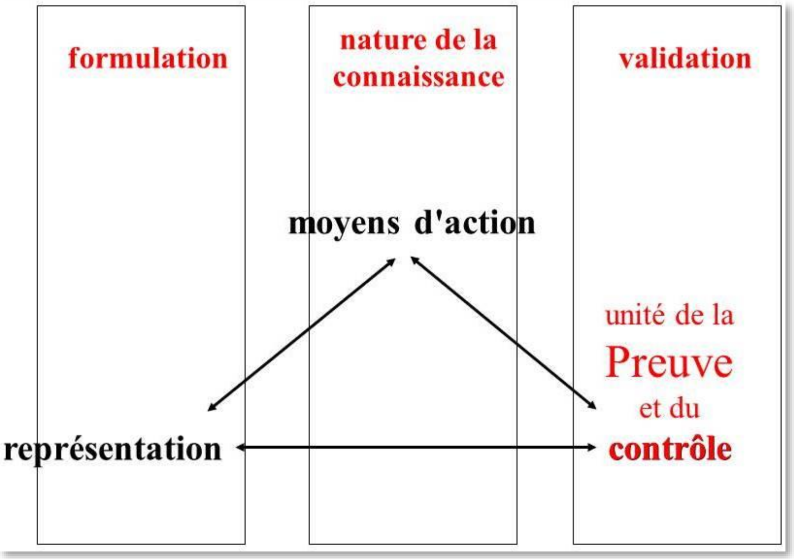
Quels interactions entre argumentation et conceptions ?

Types d'argumentation / preuve



- un même processus de résolution
- plusieurs niveaux de preuve

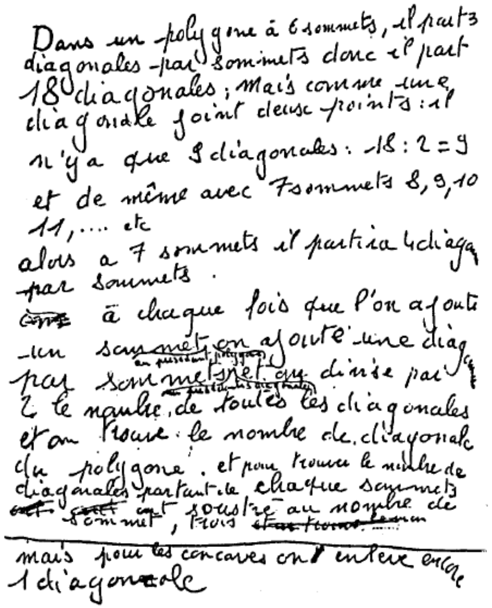
La signification de ces processus de validation ne peut être saisie sans un examen des conceptions que les élèves mobilisent, et celle de la lecture qu'ils font de la situation dans laquelle ils se trouvent.



Comprendre et modéliser le lien connaissance / preuve

Exemple générique

explicitation des raisons de la validité d'un énoncé par la réalisation d'opérations *sur* un objet bon représentant d'une classe *et* non présent pour lui-même.


Dans un polygone à 6 sommets, il part 3 diagonales par sommets donc il part 18 diagonales ; mais comme une diagonale joint deux points il n'y a que 9 diagonales : 18 : 2 = 9
et de même avec 7 sommets 8, 9, 10 11, ... etc
alors a 7 sommets il partira 4 diagonales par sommets.
à chaque fois que l'on ajoute un sommet on ajoute une diagonale par sommet. on divise par 2 le nombre de toutes les diagonales et on trouve le nombre de diagonale du polygone. et pour trouver le nombre de diagonales partant de chaque sommets ont soustre au nombre de sommet, trois
mais pour les concaves ont enlève encore 1 diagonale

- dans un polygone à 6 sommets, il part 3 diagonales par sommets donc il part 18 diagonales, mais une diagonale joint deux points il n'y a que 9 diagonales : 18:2=9
- et de même avec 7 sommets 8, 9, 10, 11, etc.
- alors à 7 sommets il partira 4 diagonales par sommet
- à chaque fois que l'on ajoute un sommet au précédent polygone on ajoute une diagonale par sommet aux précédentes diagonales et on divise par deux le nombre de toutes les diagonales et on trouve le nombre de diagonales du polygone.

Exemple générique

Défi de la représentation
→ des objets
→ des relations

Explicitation des raisons

généralisation et construction du caractère probatoire

γ $2+10=12$ $10-2=8$

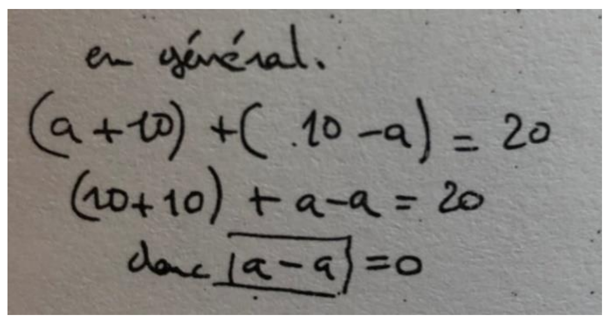
$12+8=20$

donc $(2+10)+(10-2)=20$

$(10+10)+(2-2)=20$

Il y aura toujours $10+10$

J'ai choisi 2 et il s'annule donc si je choisi un autre nombre entre 1 et 10 il s'annulera toujours et ça sera toujours égale à 20.



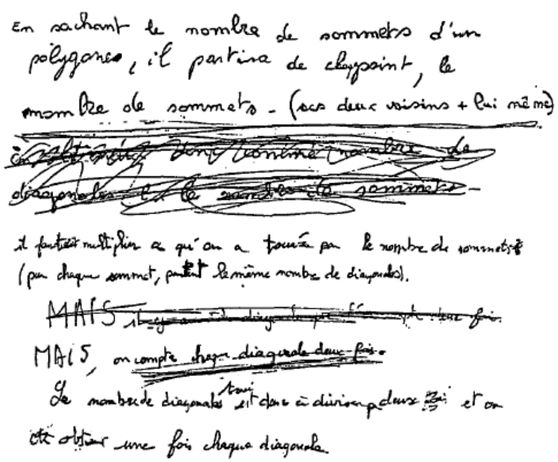
réthorique → heuristique
épistémique → ontique

Exemple repris de Balacheff 1976

Le langage, mais pas seulement… Expérience mentale

L'action est invoquée en la détachant

- de sa réalisation sur un objet particulier,
- de son contexte anecdotique
- de son auteur


En sachant le nombre de sommets d'un polygone, il partira de chaque point, le nombre de sommets - (ses deux voisins + lui même)

il faut multiplier ce qu'on a trouvé par le nombre de sommets (par chaque sommet, partent le même nombre de diagonales).

MAIS, on compte chaque diagonale deux fois.

Le nombre de diagonales est donc à diviser par deux et on obtient une fois chaque diagonale

- En sachant le nombre de sommets d'un polygone, il partira de chaque point, le nombre de sommets – (ses deux voisins + lui-même)
- Il faut multiplier ce qu'on a trouvé par le nombre de sommets (par chaque sommet il part le même nombre de diagonales)
- Mais on compte chaque diagonale deux fois. Le nombre de diagonales est donc à diviser par deux et on obtient une fois chaque diagonale.

expression d'une action intériorisée sur des objets désignés

Le langage, mais pas seulement… Expérience mentale

… il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation $y=f(x)$ rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation $y=b$ dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et x ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise.

En effet, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x=x_0$ et $x=x_1$, la courbe qui a pour équation $y=f(x)$ et qui passe 1° par le point correspondant aux coordonnées x_0, $f(x_0)$, 2° par le point correspondant aux coordonnées x_1 et $f(x_1)$, sera continue entre ces deux points; et, comme l'ordonnée constante b de la droite qui a pour équation $y=b$ se trouve comprise entre les ordonnées $f(x_0)$, $f(x_1)$ des deux points que l'on considère, la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.

Cauchy, cours d'analyse de 1821

Remarque sur le théorème des valeurs intermédiaires.

- La notion of variable domine celle de fonction (variable dépendante) avec une conception dynamique de la convergence qui influe sur celle de limite et de continuité.
- La continuité est définie sur un intervalle et non en un point, elle est intimement liée à la perception de la continuité graphique de la courbe.
- Les quantificateurs ne sont pas disponibles (il faut attendre le XX° siècle)

L'analyse est menée en prenant en compte la situation, technique et épistémologique, des mathématiques dans la première moitié du XIX° siècle.

Contrôles et représentation

à côté des déterminants cognitifs, motivationnels et contextuels

→ *le niveau et la nature de la validation dépendent du type d'accès (représentation) aux objets mathématiques concernés*

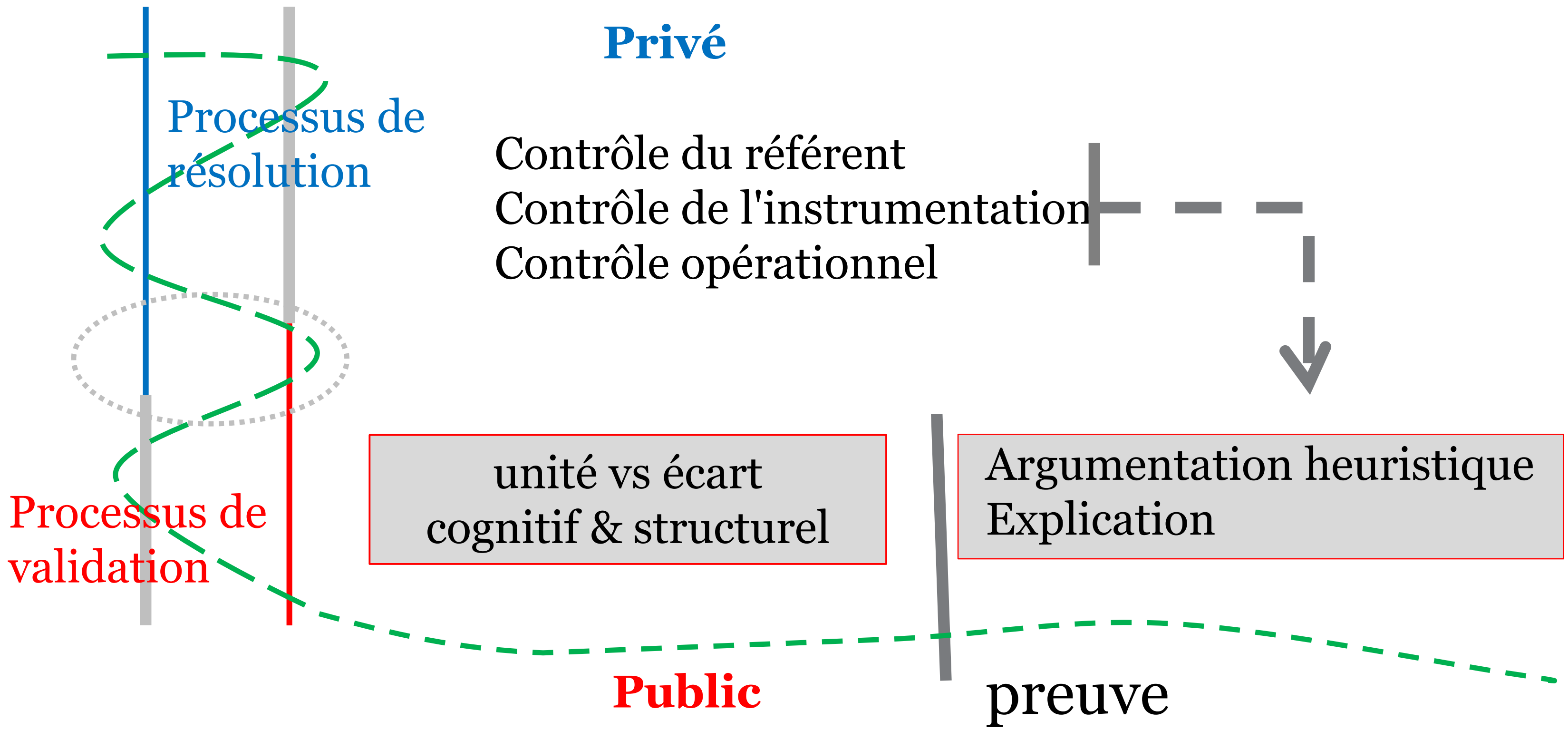
Étant donné une classe de problèmes,
la résolution de problèmes et les preuves sont liées aux…

- **systèmes de représentation**
- **opérateurs**
- **contrôles**

Modèle de "concept" de Gérard Vergnaud

Critères et outils pour juger, choisir, décider, valider

La complexité de la genèse épistémologique de l'argumentation mathématique



une structure de contrôle partagée

pour évaluer, vérifier, choisir, valider

Complexité de la genèse épistémologique de l'argumentation mathématique

L'argumentation apparaît comme un outil (naturel)

- rhétorique
- heuristique

explication

Normalisation du discours

→Dépersonnalisation

→Décontextualisation

→Dé-temporalisation

privé

public

de épistémique

à ontique

argumentation mathématique

Quand une argumentation est-elle mathématique ?

Unité épistémique

Unité cognitive - Boero

Conjecture = {conception, affirmation, argumentation}

Déclaration valide

{base de connaissances, phrase, argumentation mathématique}

Théorème = {théorie, phrase, preuve mathématique}

Quand une argumentation est-elle mathématique ?

Elle doit être claire, transparente et convaincante → dialectique du débat
acceptée par la classe de mathématiques
puis confirmé par l'enseignant
bien que
les élèves puissent ne pas avoir utilisé les définitions mathématiques classiques ou les symboles conventionnels

L'argumentation mathématique est un texte multimodal à l'appui de la vérité revendiquée d'une phrase.

Base de connaissances - explicite, établie par et pour la communauté de la classe
Phrase - linguistiquement appropriée, sémantiquement adéquate, d'une portée générale.
Argumentation - éthique, formellement cohérente, conforme aux conceptions des élèves, reliant la phrase à la base de connaissances.

Exemples génériques et expériences de pensée
sont des modèles potentiels d'argumentation mathématique

Devenue une norme socio-mathématique,
l'argumentation mathématique sera le levier
pour faire de la classe “une société mathématique”
-- bien que située et provisoire --

elle prépare l'élève à passer du praticien au théoricien (NB1990).

Références (1)

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, 18(2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724
- Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège [Doctorat ès-sciences]. Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
- Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach of the psychology of mathematics education. For The Learning of Mathematics, 10(3), 2-8.
- Balacheff, N. (2019). L’argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. 29.
- Czocher, J. A., & Weber, K. (2020). Proof as a Cluster Category. Journal for Research in Mathematics Education, 51(1), 50-74. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.2019.0007
- Duval, R. (1993). Argumenter, prouver, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? Petit x, 31, 37-61.
- EDUSCOL. (2016). Mathématiques—Raisonner. MENESR-DGESCO; RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf
- Herbst, P., & Balacheff, N. (2009). Proving and Knowing in Public : The Nature of Proof in a Classroom. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Éds.), Teaching and learning proof across the grades : A K-16 perspective (p. 40-63). Routledge.
- Herbst, P., & Chazan, D. (2012). On the instructional triangle and sources of justification for actions in mathematics teaching. ZDM, 44(5), 601-612. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0438-6

Références (2)

- Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in american school geometry : Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. Educational Studies in Mathematics, 49, 283-312.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Éds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (p. 173-204). Sense Publishers. http://math.unipa.it/~grim/YESS-5/PMEbook_MariottiNew.pdf
- Mariotti, M. A., Bussi, M. G. B., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts : From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Éd.), Proceedings of the 21st PME Conference (Vol. 1, p. 180-195). University of Helsinki.
- Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V., & Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Éds.), Developing Research in Mathematics Education (1re éd., p. 75-89). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315113562-7
- Mariotti, M. A., & Pedemonte, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems'. ZDM, 51(5), 759-777. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01059-3
- MENESR. (2015a). Cycle 1. Bulletin officiel de l'éducation nationale, Spécial(2), 21.
- MENESR. (2015b). Programme Mathématiques cycle 4. MENESR-DGESCO. http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717
- MENESR. (2018a). Cycle 2. Bulletin officiel de l'éducation nationale, 30 (26-07-2018), 30.
- MENESR. (2018b). Cycle 3. Bulletin officiel de l'éducation nationale, 30 (26-07-2018), 35.
- Miyakawa, T. (2012). PROOF IN GEOMETRY: A COMPARATIVE ANALYSIS OF FRENCH AND JAPANESE TEXTBOOKS. 8.

Références (3)

- Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport enrte argumentation et démonstration. Recherches en Didactique des Mathématiques, 25(3), 313-347.
- Pedemonte, B. (2012). L'argumentation en mathématiques et sa relation avec la démonstration. Quadrante, 21(2), 5-28. https://doi.org/10.48489/quadrante.22882
- Plantin, C. (1996). L'Argumentation. Seuil.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. Journal for Research in Mathematics, 38(3), 289-321.
- Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Éds.), Proof and Proving in Mathematics Education (Vol. 15, p. 13-49). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_2
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2/3), 133-170.
- Villani, C., & Torossian, C. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques (La documentation française, p. 96) [Rapport public]. Ministère de l'éducation nationale. https://www.ladocumentationfrancaise.fr/rapports-publics/184000086/